DUE LEZIONI SUI FONDAMENTI DELLA MATEMATICA.
MATHESIS MILANO Nov. 1985.

§ 1 - Il problema dei fondamenti della matematica può essere compreso in modo relativamente facile e chiaro quando venga impostato con una visione storica della evoluzione del pensiero scientifico.

Infatti si potrebbe osservare che la storia del pensiero ci mostra dei periodi di scoperta e dei periodi di riflessione, sistemazione e critica; e con questo termine "critica" non intendiamo sempre un giudizio negativo, come spesso si intende, ma semplicemente una riflessione sulle teorie, che conduce ad indagare sui loro punti di partenza e sulla validità delle deduzioni.

Se adottiamo questo metodo nei riguardi della matematica, potremo osservare che questa scienza ha vissuto una grande crisi nel secolo XIX (approssimativamente), questo secolo infatti è stato un periodo di grandi scoperte e di fondazioni di grandi teorie, ma anche di riflessione e di giudizio sui principi e sui fondamenti delle teorie stesse.

Tra le grandi teorie nate nel secolo scorso ricordiamo: la geometria proiettiva, la geometria differenziale, la teoria delle funzioni di variabile complessa, i germi dell'algebra moderna con la teoria dei gruppi, la topologia, la meccanica dei continui e la meccanica analitica ecc. Insieme con queste grandi teorie, che formano una saldissima struttura portante della matematica tradizionale ed anche di quella moderna, il secolo scorso ha visto anche una profonda revisione dei fondamenti della matematica. Questa analisi critica ha avuto la sua occasione nella invenzione delle geometrie non euclidee, ed è stata estesa poi anche alle altre branche della matematica, fino a coinvolgere anche la logica, cioè gli strumenti fondamentali che lo uomo utilizza per ragionare e per dedurre.

Possiamo quindi iniziare ad esaminare la crisi della geometria, per estendere poi il nostro studio alla crisi dei fondamenti della matematica intera.

Potremmo descrivere l'evoluzione (critica) della geometria durante il secolo XIX dicendo brevemente che ancora all'epoca della rivoluzione francese la geometria era considerata come una dottrina qualificata dai suoi oggetti, dai suoi contenuti; una dottrina che diceva delle cose vere di qualche cosa che sta al di fuori di noi. Non si sapeva bene che cosa fosse questo "qualche cosa"; ed osserviamo di passaggio che Euclide, nei suoi Elementi, non ha mai parlato di "spazio". Tuttavia l'oggetto della geometria veniva definito con le parole "spazio geometrico" oppure, "estensione" oppure in altro modo, a seconda delle preferenze e della concezioni filosofiche dell'autore.

Ma se esistesse un oggetto, ben determinato, della geometria, questo oggetto dovrebbe essere il fondamento della coerenza della dottina stessa, ed in particolare non potrebbe ammettere delle dottrine tra loro contradditorie. Pertanto la situazione che sussisteva all'inizio del secolo fu radicalmente fatta crollare dalla invenzione della geometria non euclidea; e soprattutto dalla costatazione che le geometrie non euclidee non presentano contraddizioni interne e quindi sono perfettamente coerenti, ed hanno uno "status" di legittimità logica analogo a quello della geometria tradizionale euclidea.

Questo fatto costrinse i matematici a cambiare radicalmente il modo di concepire la geometria ed il suo significato; e soprattutto diede inizio alla analisi dei fondamenti della geometria e, come conseguenza, anche della intera matematica. Ebbe così origine la ricerca sui fondamenti della matematica, che condusse alla moderna "teoria dei fondamenti" e alla impostazione della intera dottrina con la metodologia della cosiddetta "assiomatica".

Questa consiste nel ricercare uno "status" ideale di sistemazione di una teoria e della sua esposizione didattica, in cui vengono rigorosamente enunciati tutti i termini che designano dei concetti fondamentali (e come tali non definiti esplicitamente "per genus et differentiam" come prescriveva la logica classica); e vengono enunciate esplicitamente le proposizioni che vengono date senza dimostrazione, garantendo la loro compatibilità.

Questa sistemazione si ritrova anche nell'opera che per prima rappresentò la scienza nella storia dell'uomo: gli Elementi di Euclide; anche qui infatti noi incontriamo delle proposizioni che sono date senza dimostrazione; queste vengono indicate con "Nozioni comuni" e poi anche come "Postulati". Ma la concezione che si aveva di queste proposizioni era nel pensiero che esse fossero giustificate dalla loro pretesa "evidenza"; cioè dal fatto che esse dicessero qualche cosa di vero su qualche cosa che aveva una certa esistenza effettiva; e la loro validità era considerata garantita dalla loro evidenza nel senso che si pensava che bastasse considerare i termini delle proposizioni, e far ricorso alle esperienze elementari della nostra vita, per accettare la verità delle proposizioni stesse; verità intesa come aderenza degli enunciati ad una realtà avente una certa sua concretezza.

§ 2 - La invenzione della geometria non euclidea ha cambiato radicalmente questo modo di concepire la geometria; oggi questa dottrina viene considerata sotto due aspetti diversi: il primo è quello della geometria che si potrebbe chiamare sperimentale. Si tratta della dottrina che razionalizza le nostre esperienze sull'ambiente fisico che ci circonda, le nostre osservazioni dei fenomeni di trasporto di energia (raggi di luce), le nostre manipolazioni dei corpi, rigidi e non rigidi. F. Enriques chiamò questo aspetto della geometria " il primo capitolo della fisica"; ed infatti della scienza fisico-matematica ha tutti gli aspetti qualificanti: la schematizzazione, data dalla immaginazione, la astrazione che fa considerare soltanto alcuni aspetti della realtà di fronte ad altri, la concettualizzazione, che conduce alla formulazione precisa del concetto e spesso alla loro simbolizzazione con i simboli della matematica, la deduzione rigorosa.

Il secondo aspetto della geometria è quello di un sistema ipotetico-deduttivo (la espressione è di M. Pieri) che definisce i propri concetti in forma implicita mediante postulati, e che deduce le conseguenze di questo, giungendo a delle proposizioni che sono valide non in forza di una aderenza alla realtà concreta che ci circonda, ma soltanto in forza della correttezza del procedimento di deduzione.

Sono di questi tipo anche gli sviluppi che vengono qualificati con il nome di geometria ma che sostanzialmente traggono la loro validità dagli strumenti dell'algebra: per esempio la geometria iperspaziale,la geometria algebrica ed altri numerosi. In questo ambito si potrebbe dire che la geometria fornisce soltanto il linguaggio e certe suggestioni della immaginazione, ma non gli strumenti di conoscenza e di deduzione.

Tuttavia non si può dire che non sussistano legami tra l'uno e l'altro aspetto della geometria; infatti è ben vero che i postulati da cui parte la geometria nel senso astratto e ipotetico-deduttivo sono del tutto arbitrari, e soltanto soggetti ad essere non contradditori tra loro; ma abitualmente tali postulati sono suggeriti da esperienze sul mondo esterno, da loro generalizzazioni, ottenute con la logica e suggerite dalla fantasia creatrice del ricercatore.

D'altra parte, nel caso della geometria nel primo senso, come primo capitolo della fisica, la differenza tra la concezione moderna e quella classica è data dal fatto che in quest'ultima i postulati erano considerati come proposizioni che enunciano delle verità incontestabili ed evidenti; mentre in una concezione più moderna i punti di partenza della costruzione geometrica sono considerati soltanto come suggeriti e non imposti perentoriamente dalla osservazione della realtà esteriore.

Avviene così della geometria ciò che H. Poincarè diceva di ogni teoria fisico matematica: che cioè non abbia senso pensare una teoria vera o falsa, ma che di una teoria si possa solo dire che è più o meno adeguata a descrivere la realtà,entro determinati limiti di approssimazione, e per certi scopi, pratici o teorici.

Per chiarire il nostro pensiero pensiamo che valga la similitudine che il problema della rappresentazione di una regione della Terra: sappiamo bene che con un foglio piano non si può rivestire la sfera ma tuttavia utilizziamo la carta topografica per rappresentare delle regioni abbastanza ristrette della superficie terrestre, ben consci di commettere degli errori in assoluto, ma consci anche del fatto che gli errori che si commettono possono essere poco importanti per gli scopi teorici e pratici, che si vogliono di volta in volta conseguire.

§ 3 - La nuova visione della geometria che è scaturita dalla invenzione delle geometrie non-euclidee che cambiato anche la visione che si aveva degli altri capitoli della matematica, come vedremo. Ma prima diaffrontare questi capitoli verremmo ancora ricordare che la revisione dei fondamenti della geometria che è stata fatta con le geometrie non-euclidee non è la sola che sia avvenuta. Per comprendere il significato globale della crisi vissuta dalla geometria nel secolo XIX è forse utile riflettere sul posto che la fantasia prende nella costruzione degli oggetti su cui si esercita la riflessione della geometria.

Una prima osservazione che si può fare porta a concludere che già la questione secolare della geometria non euclidea e del postulato euclideo della parallela ha la sua radice nella interpretazione poco rigorosa del ruolo della fantasia nella costruzione della geometria.

In-fatti il postulato euclideo, nella sua formulazione originaria ed anche nei tentativi di dimostrazione che spesso si sono succeduti nei secoli, ha sostanzialmente il ruolo di una affermazione di esistenza di un punto di intersezione di due rette, quando si sia controllato ciò che avviene in una regione dello spazio che è sotto il nostro controllo. Nella formulazione euclidea tale postulato, con termini moderni potrebbe essere enunciato dicendo che: se due rette a e ad intersecate da una trasversale t, formano da una parte di questa due angoli interni che hanno una somma diversa da due retti, le rette si incontrano e precisamente da quella parte, rispetto alla trasversale, da cui la somma è minore di due retti.

Ora è facile osservare che il controllo del fatto che la somma degli angoli interni è diversa da due retti è una osservazione che può essere fatta, perchè è nel campo dello sperimentatore; ma la affermazione del postulato precisa che il punto di intersezione esiste, senza dire dove: potrebbe essere lontanissimo!

E' proprio in questo pensiamo che vi sia l'intervento della fantasia a proposito dell'enunciato, perchè questo enuncia una estrapolazione fantastica di ciò che può essere verificato direttamente ed è alla portata dell'osservatore, a distanza invece che, in linea di principio, non possono essere accessibili.

Pensiamo che bastino queste poche osservazioni per confermare che la geometria ci si presenta si come una dottrina che razionalizza le nostre esperienze sui corpi e sull'ambiente che ci circonda, ma che trae la origine degli enti che studia anche da una elaborazione fantastica di quest'esperienze, come vedremo meglio in seguito, parlando a propostito delle questioni riguardanti quell'ente che viene chiamato abitualmente "continuo geometrico".

Analoghe osservazioni potrebbero essere formulate a proposito delle proposizioni che furono spesso enunciate per sostituire la proposizioni euclidea sulla parallela; per esempio la proposizione di J. Wallis il qualè propose di postulare che, data una figura, esiste certo un'altra figura che è simile alla prima ed è comunque grande, trae pure la sua origine psicologica dalla immaginazione, che è portata a rappresentarsi una figura comunque grande, anche senza che la esperienza abbia confortato questa immagine.

Si noti che in questo momento non stiamo cercando di bandire ogni intervento della immaginazione nella geometria, ed in generale nella costruzione di una teoria scientifica, o in particolare di una teoria matematica. Il nostro scopo è soltanto quello di distinguere il ruolo della immaginazione da quello della concettualizzazione e della deduzione rigorosa, anche se la immaginazione è - a nostro parere- necessaria per la ideazione di una teoria e per la soluzione di problemi.

Pertanto le apparenti contraddizioni e le situazioni paradossali, che si sono presentate nel momento della costruzione delle varie geometrie non-euclidee, possono essere superate tenendo conto del fatto che ciascuna di esse non è fondata solamente sulla osservazione di fatti fisici, ma che si fonda su queste osservazioni e su estrapolazioni eseguite dalla fantasia; la quale compie il suo compito legittimo di completamento della esperienza, ma non può pretendere alla certezza assoluta. Quindi, dal punto di vista della interpretazione fisica e della geometria intesa come primo capitolo della fisica, non vi è contraddizione nè paradosso nella possibilità di descrivere la stessa realtà materiale e fisica con teorie tra loro contraddittorie.

E' opportuno inoltre ricordare che la realtà materiale e fisica è sempre rappresentata e "codificata" con la mediazione di operazioni di misura o altre, le quali ammettono ovviamente in ogni caso dei margini di errore, senza che l'esperimento possa discriminare tra una oppure un'altra interpretazione delle misure, che non hanno mai e non possono avere una precisione assoluta.

Per quanto riguarda poi le varie geometrie concepite come sistemi ipotetico-deduttivi, allora la coerenza è obbligatoria soltanto per quanto riguarda gli enunciati, senza che si possa pretendere una aderenza assoluta con la realtà fisica materiale.

L'importanza delle considerazioni sulla fantasia che abbiamo svolto si renderà ancora più evidente dalla analisi che faremo subito sui problemi del continuo geometrico e dell'infinito, che hanno provocato riflessioni e discussioni secolari.

§ 4 - Il problema del significato e della natura del continuo geometrico è uno dei problemi logici più antichi ed ha fatto meditare e ricercare matematici e filosofi durante i secoli. Invero si trovano tracce di questo problema presso la filosofia eleatica: pare infatti che i famosi paradossi del moto, e di Achille si possano interpretare come originati dalla discussione sulla natura del continuo geometrico; e del resto il teorema di Pitagora porta come conseguenza la esistenza di coppie di grandezze incommensurabili tra loro, come il lato e la diagonale di un medesimo quadrato; e questa incommensurabilità porta come conseguenza la non esistenza di una particella elementare di quell'ente misterioso che potrebbe essere indicato come lo "spazio geometrico".

Ci pare anche abbastanza sostenibile la opinione secondo la quale la immagine del continuo geometrico è alla base della origine del calcolo infinitesimale: sappiamo anche che tra i grandi fondatori di questa branca oggi fondamentale della matematica infuriarono le dispute sulla natura del continuo. La operazione di calcolo del "rapporto tra grandezze evanescenti" (ossia che tendono allo zero) costituisce uno dei momenti fondamentali del calcolo della derivata di una funzione data, nel pensiero di I. Newton; presso Leibnitz invece tale rapporto era concapito come se fosse il rapporto tra due "indivisibili", che avrebbero realizzato quel concetto di "elemento di spazio" che il teorema di Pitagora aveva dimostrato inesistente.

Analoghe considerazioni, ed oscillazioni di opinioni, e dispute, si rinnovarono a proposito del concetto di "indivisibile" che B. Cavalieri pose alla base del nascente calcolo dell'integrale di una funzione e che furono utilizzati anche da B. Pascal, con precauzioni esplicitamente enunciate, che ne facevano soltanto uno strumento euristico; posizione psicologica e concettuale analoga a quella che poi si scoprì essere stata adottata anche da Archimede, nelle sue opere geniali piene di inventiva e di rigore.

Parallelamente al concetto intuitivo di continuo geometrico, la analisi matematica adottò anche lungamente il concetto intuitivo di funzione continua.

Sull'immaginazione delle proprietà fondamentali di queste funzioni sono fondate le basi dell'analisi matematica classica; ed a questo proposito ricordiamo che la prima costruzione che Euclide espone nel I libro degli elementi richiede la esistenza della intersezione di due circonferenze una delle quali ha un punto interno ed uno esterno all'altra. Esistenza che non fa parte dei postulati enunciati e che quindi dovrebbe essere in qualche modo accertata, o con una dimostrazione o con un postulato.

Analoghe considerazioni potrebbero essere svolte a proposito delle dimostrazioni classiche, che presumevano di dare come "intuitiva" la esistenza di un valore nullo per una funzione continua che prendesse valori di segno diverso negli estremi di un intervallo.

Gli aspetti oscuri di queste questioni furono chiariti soltanto dopo che fu costruito in modo rigoroso il campo dei numeri reali e fu enunciato in modo esplicito un postulato che codificasse la continuità della retta; proprietà che fu poi estesa con rigorosi ragionamenti anche alle altre figure di cui si occupa la geometria elementare.

Prima di questa costruzione rigorosa, la proprietà di continuità della retta (ed anche della materia presso qualche autore) erano enunciate semplicemente con la esigenza che una grandezza che passa da un valore ad un altro prende tutti i valori intermedi. Ma questo enunciato (ed altri analoghi) non risolvono il problema della esistenza delle grandezze prese in considerazione. Per poter capire bene il significato di questa critica si consideri il ragionamento che è stato fatto talvolta e che riguarda la esistenza del lato dal quadrato la cui area fosse uguale a due volte l'area del quadrato di lato 1; qualcuno ha talvolta argomentato che, facendo crescere il lato del quadrato da 1 a 2 la sua area passa da 1 a 4. Quindi - si argomenta - esisterà un valore del lato che fa assumere all'area il valore intermedio 2. Questa argomentazione ignora il fatto che proprio la esistenza di tale valore è in questione, come si verifica direttamente immaginando che i lati dei quadrati possano assumere soltanto valori commensurabili con quello scelto come unità di misura. Invero l'oggetto del postulato di continuità è proprio la esistenza di un punto sulla retta che realizza il lato del quadrato che si cerca; e la costruzione del campo reale conduce alla determinazione di un simbolo che corrisponde a tale segmento.

Si potrebbe quindi dire che le difficoltà logiche e psicologiche, riguardano la costruzione del campo reale, e quelle che riguardano il chiarimento del concetto di continuo geometrico sono strettamente collegate.

§ 5 - Pare a noi che il fondamento psicologico e logico delle difficoltà basilari del concetto di numero reale consista nel fatto che necessariamente, per la costruzione di un numero reale, si cade nella utilizzazione di un insieme di infiniti numeri razionali. Pertanto le difficoltà del concetto di numero reale si intrecciano con le difficoltà riguardanti gli insiemi di infiniti elementi, e quindi con i problemi logici relativi.

Come è noto, fino dall'inizio del contatto con la matematica, il discente si trova di fronte ad un insieme infinito: quella dei numeri interi naturali; ma questo insieme gli si presenta solo come potenzialmente infinito, nel senso che gli prende subito coscienza del fatto che non esiste il massimo intero naturale, e che egli, dato che sia un numero, può sempre <u>immaginare</u> di costruirne un altro maggiore, aggiungendo una unità.

Abbiamo sottolineato il verbo "immaginare", perche ci pare che la distinzione tra ragionamento ed immaginazione sia, anche in questo campo, molto importante. Per capirlo, si pensi alla dimostrazione classica che Euclide dà della esistenza di infiniti numeri primi. Ovviamente in questo caso la immaginazione non ha molta importanza, perchè appare difficile immaginare la operazione che ci conduce da un primo al successivo. Quindi questa dimostrazione è fondata essenzialmente sul ragionamento, mentre la costruzione del successivo di un intero è spesso lasciata alla immaginazione, come si è detto.

Questa immaginata ripetizione di una determinata operazione è probabilmente anche al fondo delle trattazioni che riguardano gli algoritmi infiniti dell'analisi matematica: successioni, serie, prodotti infiniti, frazioni continue infinite ecc. Analogamente pensiamo che siano da attribuirsi alla immaginazione i punti oscuri delle trattazioni classiche; per esempio i paradossi riguardanti le serie, paradossi che vengono ovviamente superati quando si passi ad una definizione rigorosa, senza accontentarsi della frase "somma di infiniti termini". Cose analoghe si potrebbero ancora dire a proposito del concetto di integrale, che venne spesso descritto pure come "somma di infiniti termini infintesimi", ma che divenne rigoroso quando fu definito con precisione, indipendentemente dalla immaginazione. Infine, cose analgohe si potrebbero dire del concetto di "curva" che ha un fondamento nella nostra esperienza, viene elaborata dalla nostra immaginazione, ma che fu definita rigorosamente soltanto dopo gli esempi critici portati da V. Koch, Peano, Hilbert ecc.

Possiamo dire anche che molte delle discussioni sui paradossi logici e molte delle polemiche sull'intuizionismo (pro e contro) e sul cosiddetto postulato di Zermelo, e sulle teorie zermeliane o non zermeliane degli insiemi, possono essere attribuite alla confusione tra la tentazione di dare come esistenti delle cose che sono soltanto immaginate in qualche modo, oppure di pretendere che gli insiemi di cui si parla siano rigorosamente definiti con strumenti della logica; ed - aggiungiamo noi - con un numero finito di simboli linguistici, senza affidarsi a frasi come "... e così via" o analoghe, che fanno appello alla immaginazione ma non alla logica.

Un caso tipico di questa analisi logica fu incontrato, come si è detto, con la analisi rigorosa del primo concetto matematico che il giovane incontra: quello di numero intero naturale.

Infatti, a ben guardare, le proprietà fondamentali dei numeri e delle loro operazioni non sono mai dimostrate rigorosamente nei corsi elementari di aritmetica: si danno delle regole e degli enunciati, si verificano in un certo numero di casi, e poi si lascia alla immaginazione la estensione ad un numero qualunque.

E' possibile dire che la legge di induzione è uno dei fondamenti della matematica; ma l'analisi della natura e del fondamento di tale legge non è semplice; essa ha formato oggetto di discussioni che si sono svolte all'inizio di questo secolo ed alle quali hanno partecipato scienziati di altissima fama, come per es. H. Poincarè.

Inoltre il concetto stesso di numero intero naturale è difficilissimo da definire in termini espliciti, perchè -riteniamo- le operazioni concrete che vi conducono, ed i concetti che si traggono da queste operazioni sono talmente semplici ed elementari che sarebbe difficile immaginarne altri a livello di maggiore semplicità.

Questi problemi logici sono stati in qualche misura appianati (se non completamente risolti) quando si è acquisita la convinzione del fatto che non è possibile definire esplicitamente tutti i concetti di'cui tratta una teoria; e che - di conseguenza - è necessario ricorrere alle definizioni estensive ("per additamentum" dicevano i logici medioevali) per gli oggetti materiali, o alle definizioni per postulati nel caso di concetti generali.

Osservazioni che si trovano per es. in B. Pascal (De l'ésprit géométrique et de l'art de persuader) ma che occorre richiamare esplicitamente perchè la tentazione di dare delle definizoni che sono prive di senso o si riducono a circoli viziosi è sempre molto forte, soprattutto nei compilatori di testi di scuola.

Nel caso del numero naturale il problema fu risolto da G. Peano con i suoi celebri postulati, con i quali egli caratterizza tre concetti: un insieme infinito (quello dei numeri) un elemento di questo insieme (lo zero) ed una operazione logica su elemnti di questo insieme (la operazione "successivo di...").

La legge di induzione viene enunciata da Peano nei suoi postulati e quindi diventa costituitiva del concetto di numero naturale. E' così superato il problema logico della sua giustificazione o dimostrazione, anche se rimane sempre il problema della analisi della sua radice psicologica.

Pertanto Peano riesce, con un numero finito di simboli, a dare una legge che domina le ripetizioni indefinite di certe operazioni logiche ; quindi si potrebbe dire che Peano formula in modo rigoroso, nel campo dell'aritmetica quello che prima di lui era lasciato alla immaginazione della pretesa "ripetizione indefinita" di certe operazioni materiali o logiche.

Nello stesso spirito Peano criticò anche certe dimostrazioni della analisi matematica che erano fondate sulla immaginata possibilità di eseguire infinite scelte arbitrarie in insiemi infiniti. Si potrebbe quindi dire che l'opera e soprattutto lo spirito di Peano introdussero il rigore nella aritmetica e fecero, in questo campo, ciò che era stato fatto nel campo della geometria con la dimostrazione della compatibilità logica delle geometrie non euclidee e quindi con l'accertamento della impossibilità di concepire la geometria secondo lo schema classico abituale.

\$ 6 - Ricordiamo infine che Peano fu strenuo assertore della necessità di trovare un simbolismo rigoroso per la logica, per evitare le insidie del linguaggio comune, insidie in cui si cade spesso quando si utilizzano gli strumenti espressivi che sono forniti dal linguaggio comune.

In ciò egli portò molto avanti il cammino lungo una strada che già era stata imboccata la Leibnits e che venne percorsa nel secolo XIX da Boole e da altri.

Invero il linguaggio comune ha vari compiti, oltre a quello di comunicare dei concetti: infatti di esso noi ci serviamo per trasmettere per esempio dei comandi o degli stati d'animo e delle emozioni. Inoltre il significato di un termine del linguaggio comune è abitualmente precisato soltanto dal contesto in cui il termine è inserito.

Invece la introduzione di simboli artificiali per indicare i concetti permette di raggiungere una designazione univoca di questi, e di ridurre la operazione di deduzione ad una trasformazione di formule, analoga ad un calcolo. Si potrebbe dunque dire che Peano ha fatto, nel campo della logica, ciò che era stato fatto con la introduzione delle cifre arabo-indiane nel campo dell'aritmetica e dei simboli algebrici nel campo della algebra.

Occorre tuttavia osservare che, analogamente a quanto avviene per l'aritmetica e per l'algebra, questi linguaggi non sono completamente indipendenti da un contesto, che è necessariamente dato dal linguaggio comune; infatti i simboli numerici ed algebrici debbono essere spiegati, nel loro significato, con il linguaggio comune . Ma il loro significato rimane precisato una volta per tutte, e non varia da frase a frase, come avviene invece con il discorso abituale.

E' da aggiungere anche che rimangono problemi aperti anche dopo la adozione di questi strumenti concettuali; tra gli altri, ricordiamo il problema della categoricità e quello della compatibilità. Ricordiamo che un sistema di postulati viene chiamato "categorico" se ammette soltanto un modello, a meno di isomorfismi, cioè se tutti modelli (tutti i "contenuti") che si possono designare con il sistema simbolico sono isomorfi tra loro. E' stato recentemente dimostrato che l'aritmetica elementare è soltanto uno dei modelli che vengono descritti dai postulati di Peano. Inoltre, quando si costruisce un sistema di postulati, è necessario mostrare che esso non contiene contraddizioni. In mancanza di questo accertamento è chiaro che il sistema di postulati può risultare inconsistente e quindi non permettere la costruzione di alcuna teoria valida.

Queste questioni ed altre molto importanti hanno formato oggetto di ricerche anche recenti, ricerche che hanno condotto per esempio Gödel ai suoi celebri teoremi, che accertano la possibilità di costruire delle frasi indecidibili in ogni teoria abbastanza ricca da poter dominare la aritmetica elementare.